# АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина $\xi$ имеет *абсолютно непрерывное распределение*, если существует функция $f(x)$, такая что $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ для любых вещественных чисел a, $b$.

Данная функция $f(x)$ называется *функцией плотности распределения*.

Абсолютно непрерывная случайная величина задается функцией плотности либо, что чаще удобнее, *функцией распределения* $F(x) = P(\xi < x)$.

Основные свойства этих функций:

1). $f(x) \geq 0$ и выполнено условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2). $F(x)$ – непрерывная неубывающая функция, $0 \leq F(x) \leq 1$, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

3). $f(x) = F'(x)$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

4). $P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Числовые характеристики непрерывного распределения находим по формулам:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\,; \qquad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E\xi)^2; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

$$F(x) = P(\delta < x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$f(x) = F'(x)$$

98. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $a$, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал (0,5; 1,5), построить графики плотности и функции распределения.

1) $a$ - ?

2) $E_\xi, D_\xi, \sigma$ - ?

3) $F(x)$ - ?

4) $P(0{,}5 < \delta < 1{,}5)$

1) $\int_0^2 ax\,dx = \frac{ax^2}{2}\Big|_0^2 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

2) $E_\xi = \int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

$D_\xi = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - (E_\xi)^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$

3) $F(x) = P(\delta < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

при $x < 0$, $F(x) = 0$

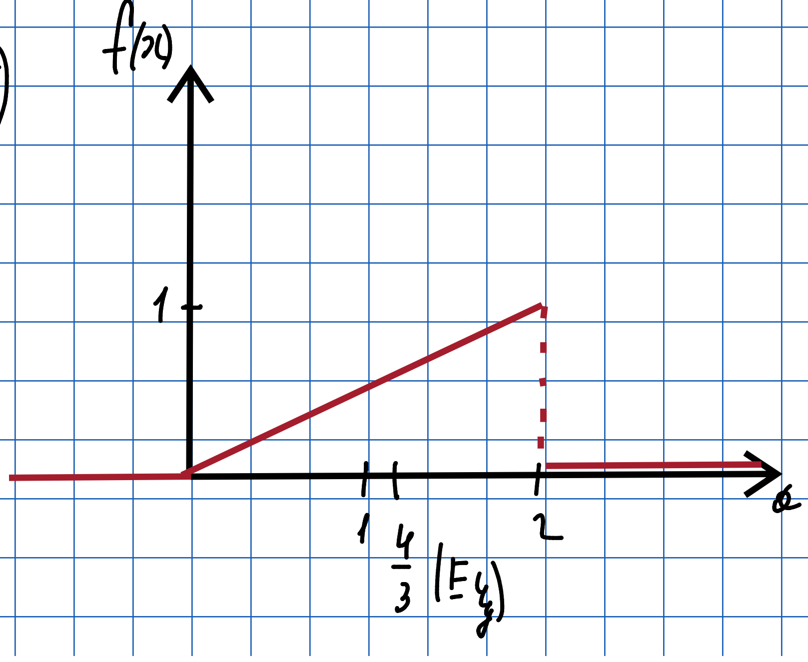
при $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \int_0^x \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}$

при $x > 2$, $F(x) = 1$

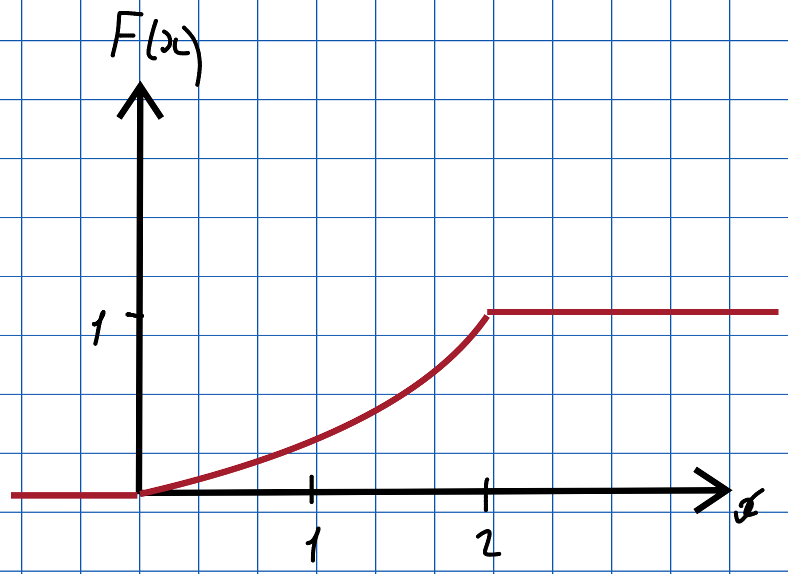
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/4\\ 1, & x>2\end{cases}$$

4) $P(0{,}5<\xi<1{,}5)=F(1{,}5^-)-F(0{,}5^-)=\frac{1}{4}(2)=\frac{1}{2}$

5)









100. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{a}{x^4}, & x\geq 1\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $a$, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервалы $(2;4)$, $(0;3)$, $(4;\infty)$, построить графики плотности и функции распределения.

1) $\int_1^\infty \frac{a}{x^4}dx = a\int_1^\infty x^{-4}dx = a\int_1^\infty \frac{x^{-3}}{-3}dx = a\left(-\frac{x^{-3}}{3}\Big|_1^\infty\right)=\frac{a}{3}, \quad a=3$

2) $E\xi = 3\int_1^\infty x^{-3}dx = 3\,\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^\infty = \frac{3}{2}$

$D\xi = 3\int_1^\infty x^{-2}dx-(E\xi)^2 = 3\,\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^\infty - \frac{9}{4} = 3-2\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3)

101. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ Ax+B, & -2\le x\le 4;\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найти неизвестные параметры $A$ и $B$, плотность, ее числовые характеристики, вероятность попадания в интервал $(0;3)$, построить графики плотности и функции распределения.

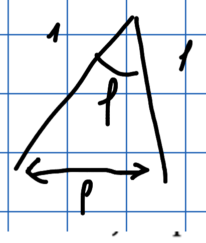
$$\begin{cases}4A+B=1\\ -2A+B=0\end{cases}\qquad 6A=1,\quad A=\frac{1}{6}$$

$$B=1-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=A=\frac{1}{6}$$

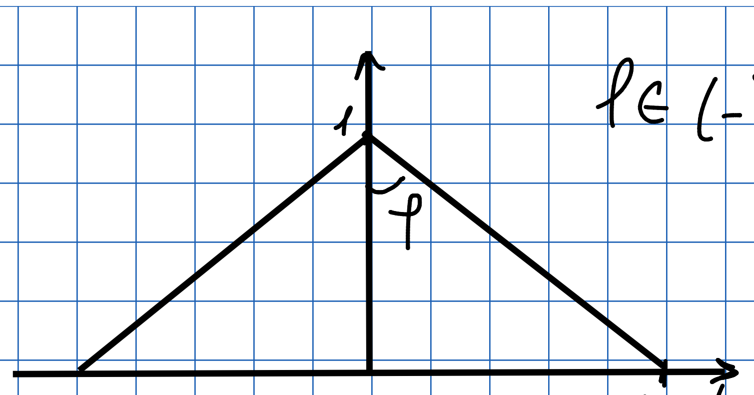
$$F(3)-F(0)=3A=\frac{1}{2}$$

107. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол $\varphi\in[0;\pi]$.
Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.



$$r(\varphi)=\sqrt{2-2\cos\varphi}=\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2\cos\frac{\varphi}{2}$$

110. В точке (0,1) находится источник излучения, равномерно испускающий частицы во все стороны. Случайная величина $\xi$ – точка пересечения частицы с осью OX. Найти ее функцию распределения, плотность и математическое ожидание.



$$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x=\operatorname{tg}\varphi$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}x$$

$$F(x)=P(\xi<x)=P\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\operatorname{arctg}x\right)=\frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}}{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x,\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi}\ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

абс. сх. нет

мат. ож. не сущ.

Домашка

99, 107, 109, 105