

## ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайную величину называем *дискретной*, если она принимает не более чем счетное число значений. Такая случайная величина задается законом распределения:

$\xi$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	...
P	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	...

Здесь элементы первой строки  $x_i$  – значения, которые может принять данная случайная величины, а элементы второй строки  $p_i$  – вероятности этих значений, причем  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ .

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* (среднее значение)  $E\xi$ , *дисперсия*  $D\xi$  и *среднее квадратическое отклонение*  $\sigma_\xi$ , которые вычисляются по формулам:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i; \quad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (E\xi)^2; \quad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

### А

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

$\xi$	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

$$E\xi = -0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,1$$

$$D\xi = 0,3 + 0,2 + 0,4 - 0,01 = 0,89$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = 0,94$$

2. Найти  $p_4$ , числовые характеристики дискретной случайной величины и  $P(0 \leq \xi < 2)$ . Найти функцию распределения и построить ее график.

$\xi$	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	$p_4$	0,2

$$p_4 = 1 - 0,4 - 0,2 - 0,1 - 0,2 = 0,1$$

$$E\xi = -0,8 - 0,2 + 0,1 + 0,6 = -0,3$$

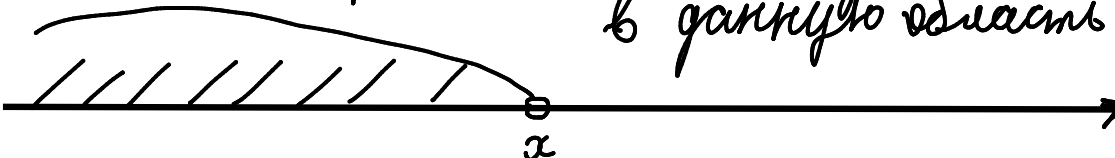
$$D\xi = 1,6 + 0,2 + 0,1 + 1,8 - 0,09 = 3,61$$

$$\sigma_\xi = 1,9$$

$$P(0 \leq \xi < 2) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

# Функция распределения

опр.  $F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$   
 $F(x)$  - вероятность попадания в данную область

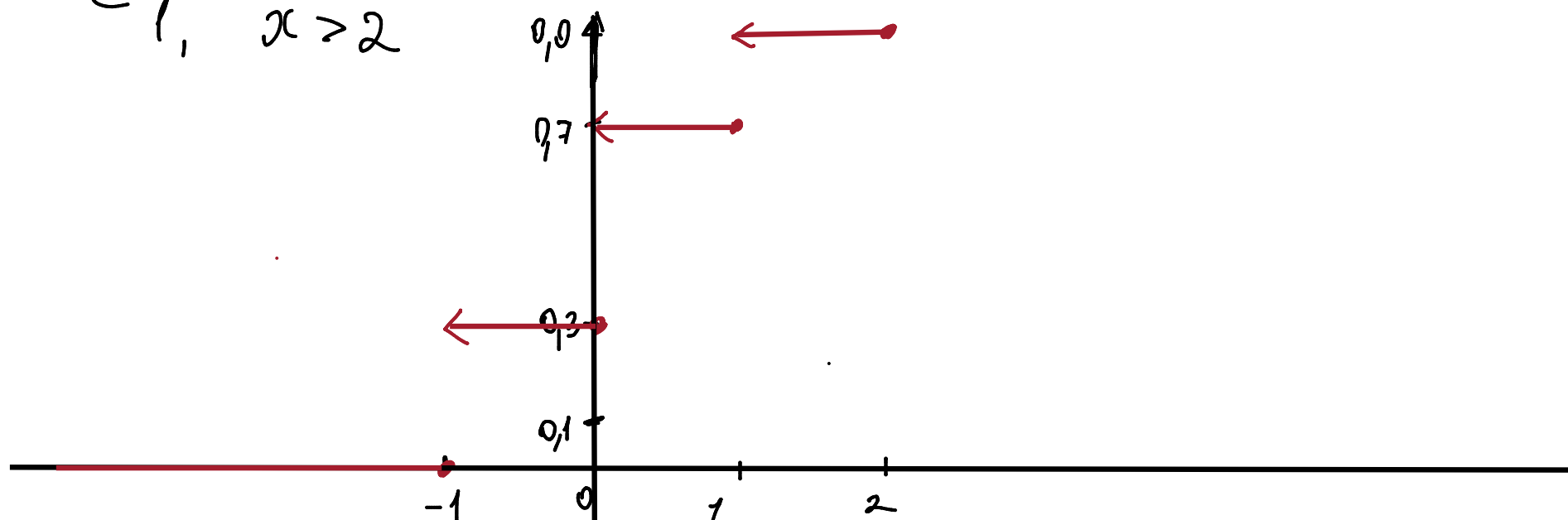


А

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

$\xi$	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

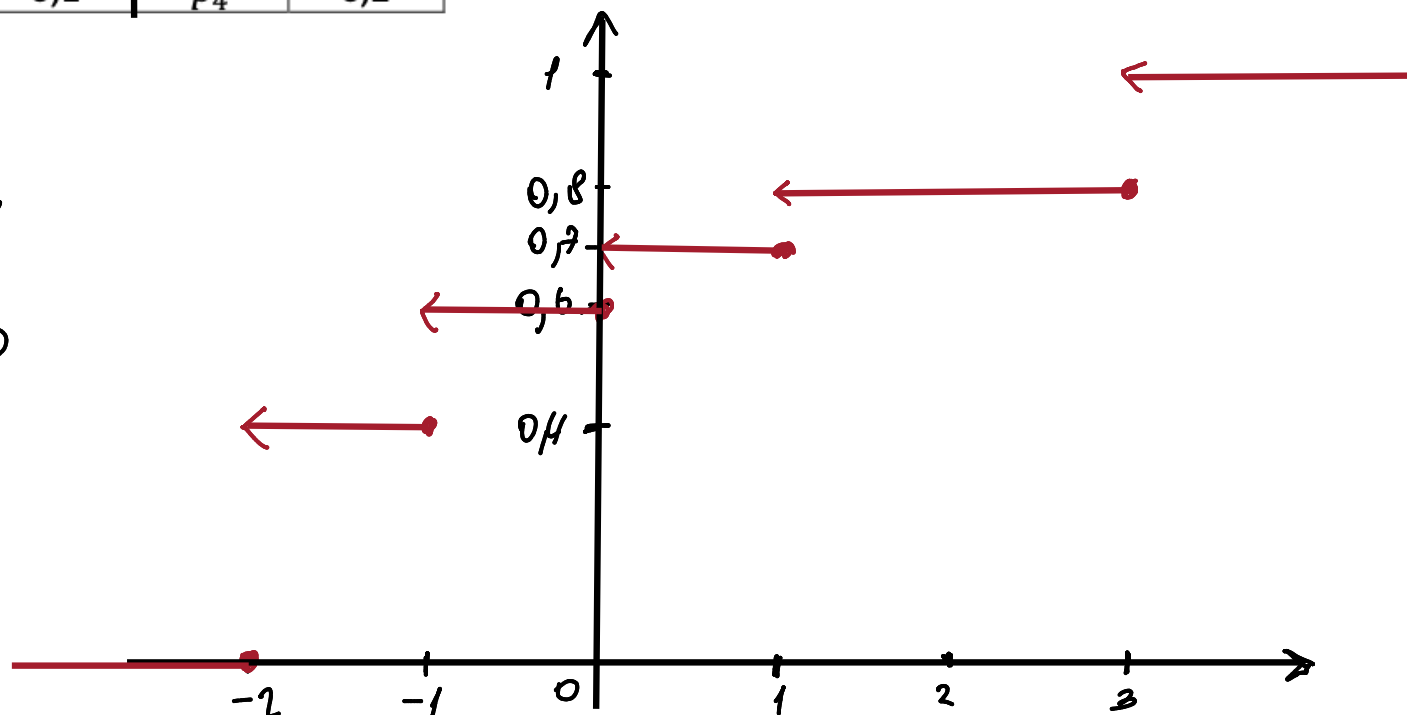
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0,3 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0,3 + 0,4 = 0,7 & 0 < x \leq 1 \\ 0,7 + 0,2 = 0,9 & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



2. Найти  $p_4$ , числовые характеристики дискретной случайной величины и  $P(0 \leq \xi < 2)$ . Найти функцию распределения и построить ее график.

$\xi$	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	$p_4$	0,2

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ 0,4 & -2 < x \leq -1 \\ 0,6 & -1 < x \leq 0 \\ 0,7 & 0 < x \leq 1 \\ 0,8 & 1 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



## Свойства математического ожидания и дисперсии

$$1) E C = C, D C = 0$$

$$2) E(\xi + C) = E\xi + C \quad D(\xi + C) = D\xi$$

$$3) E(C \cdot \xi) = C \cdot E\xi, \quad D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$$

$$4) E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

$$5) \text{ Если } \xi, \eta - \text{незав}, \text{ то } E(\xi \eta) = E\xi \cdot E\eta$$

$$6) \text{ Если } \xi, \eta - \text{незав}, \text{ то } D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

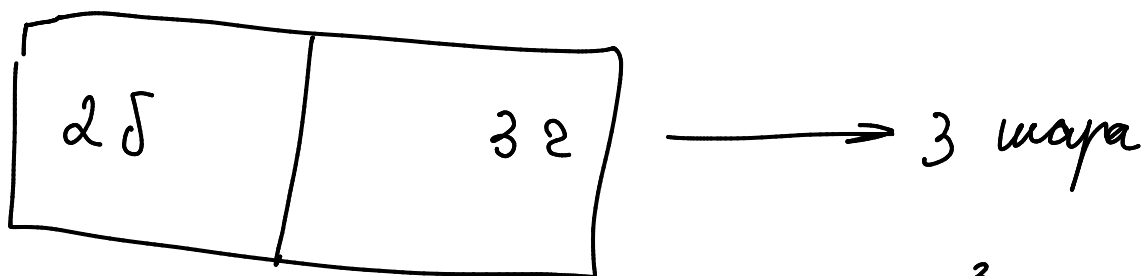
$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta), \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \eta) - E\xi \cdot E\eta$$

5. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы,  $E\xi = -1$ ,  $D\xi = 2$ ,  $E\eta = 3$ ,  $D\eta = 5$ .  
Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $3\xi - 2\eta$ .

$$E(3\xi - 2\eta) = 3E\xi - 2E\eta = -3 - 6 = -9$$

$$D(3\xi - 2\eta) = D(3\xi) + D(-2\eta) = 9D\xi + 4D\eta = 18 + 20 = 38$$

1. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Из урны извлекли три шара. Случайная величина  $\xi$  – число белых среди них.  
Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.



$\xi$	0	1	2
$p$	0,1	0,6	0,3

$$p(\xi=0) = \frac{C_2^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

$$p(\xi=1) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = 0,6$$

$$p(\xi=2) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = 0,3$$

$$E\xi = 1,2$$

$$D\xi = 0,6 + 1,2 - 1,44 = 0,36$$

2. Вероятность попадания биатлониста в цель при одном выстреле равна 0,5. У стрелка четыре патрона, он стреляет в цель до первого попадания. Случайная величина  $\xi$  – число сделанных выстрелов.  
Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

$$p(\xi=k) = q^{k-1} \cdot p$$

$$p(\xi=1) = p = 0,5$$

$$p(\xi=2) = 0,25$$

$$p(\xi=3) = 0,125$$

$$p(\xi=4) = q^3 p + p^4 = 0,125$$

$\xi$	1	2	3	4
$p$	0,5	0,25	0,125	0,125

$$E\xi = 0,5 + 0,5 + \dots = 1,875$$

$$D\xi = 0,5 + 1 + 9 \cdot 0,125 + 16 \cdot 0,125 - (1,875)^2 = 1,109375$$

$$\sigma_\xi \approx 1,053$$

$$\approx 1,109$$

4. Казино предлагает вам сыграть в игру: вы бросаете два игральных кубика, и получаете приз в зависимости от выпавшей на них суммы очков:

12 очков - 100 рублей, 11 очков - 90 рублей, 10 очков - 80 рублей, 9 очков - 50 рублей, от 2 до 8 очков - 0 рублей.

Какую сумму вы согласны заплатить за возможность сыграть в такую игру?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\xi$	0	50	80	90	100
$p$	$\frac{26}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E\xi = 50 \cdot \frac{4}{36} + 80 \cdot \frac{3}{36} + 90 \cdot \frac{2}{36} + 100 \cdot \frac{1}{36} = 20$$

Ответ: 20