

Практика

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайную величину называем *дискретной*, если она принимает не более чем счетное число значений. Такая случайная величина задается законом распределения:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Здесь элементы первой строки x_i – значения, которые может принять данная случайная величина, а элементы второй строки p_i – вероятности этих значений, причем $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* (среднее значение) $E\xi$, *дисперсия* $D\xi$ и *среднее квадратическое отклонение* σ_{ξ} , которые вычисляются по формулам:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i; \quad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (E\xi)^2; \quad \sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$$

A

- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

$$E\xi = -0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,1$$

$$D\xi = 0,3 + 0,2 + 0,4 - 0,01 = 0,89$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = 0,94$$

- Найти p_4 , числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(0 \leq \xi < 2)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	p_4	0,2

$$p_4 = 1 - 0,4 - 0,2 - 0,1 - 0,2 = 0,1$$

$$E\xi = -0,8 - 0,2 + 0,1 + 0,6 = -0,3$$

$$D\xi = 1,6 + 0,2 + 0,1 + 1,8 - 0,09 = 3,61$$

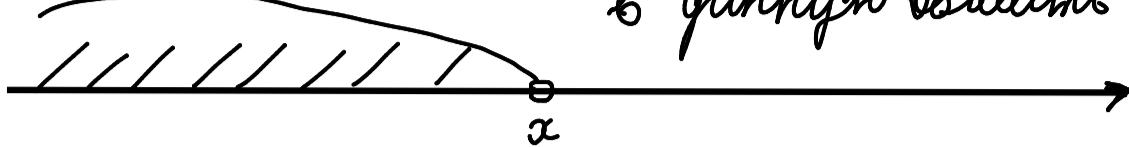
$$\sigma_{\xi} = 1,9$$

$$P(0 \leq \xi < 2) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

Функция распределения

Оп. $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$

$F(x)$ - вероятность попадания
в данную область

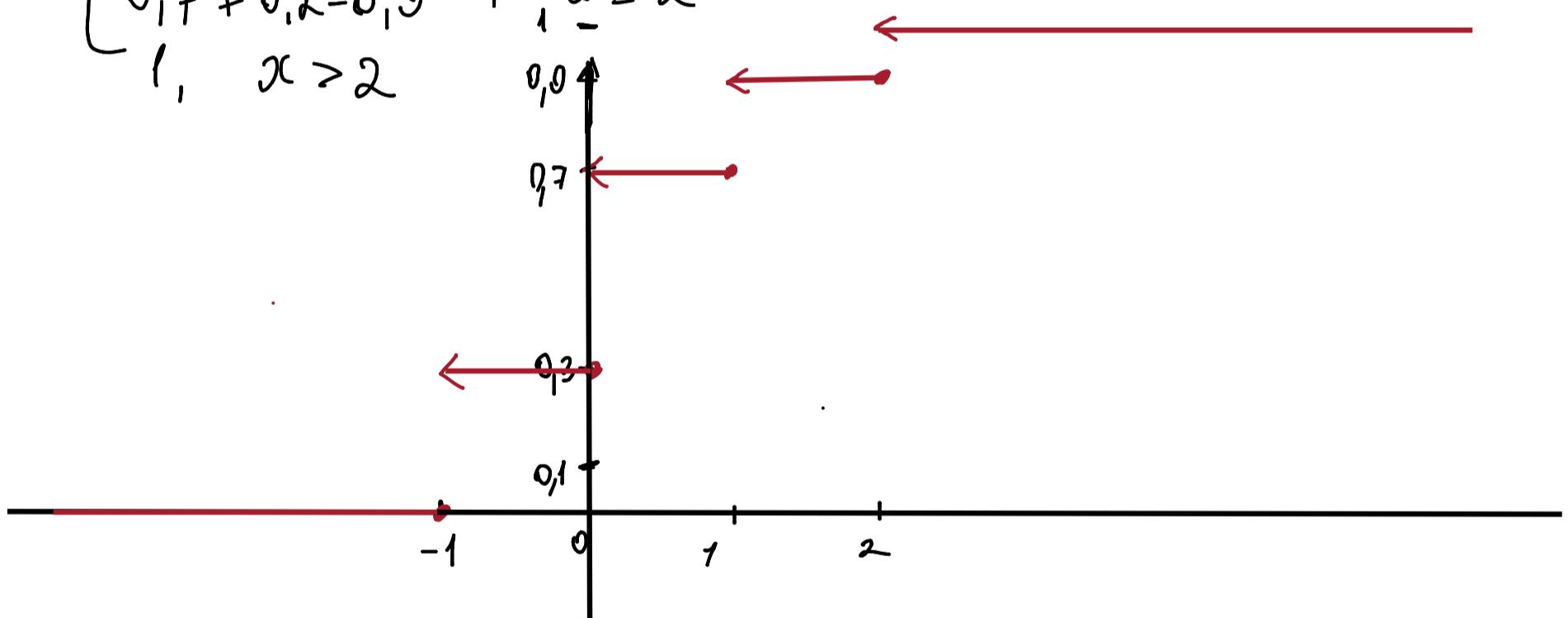


A

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

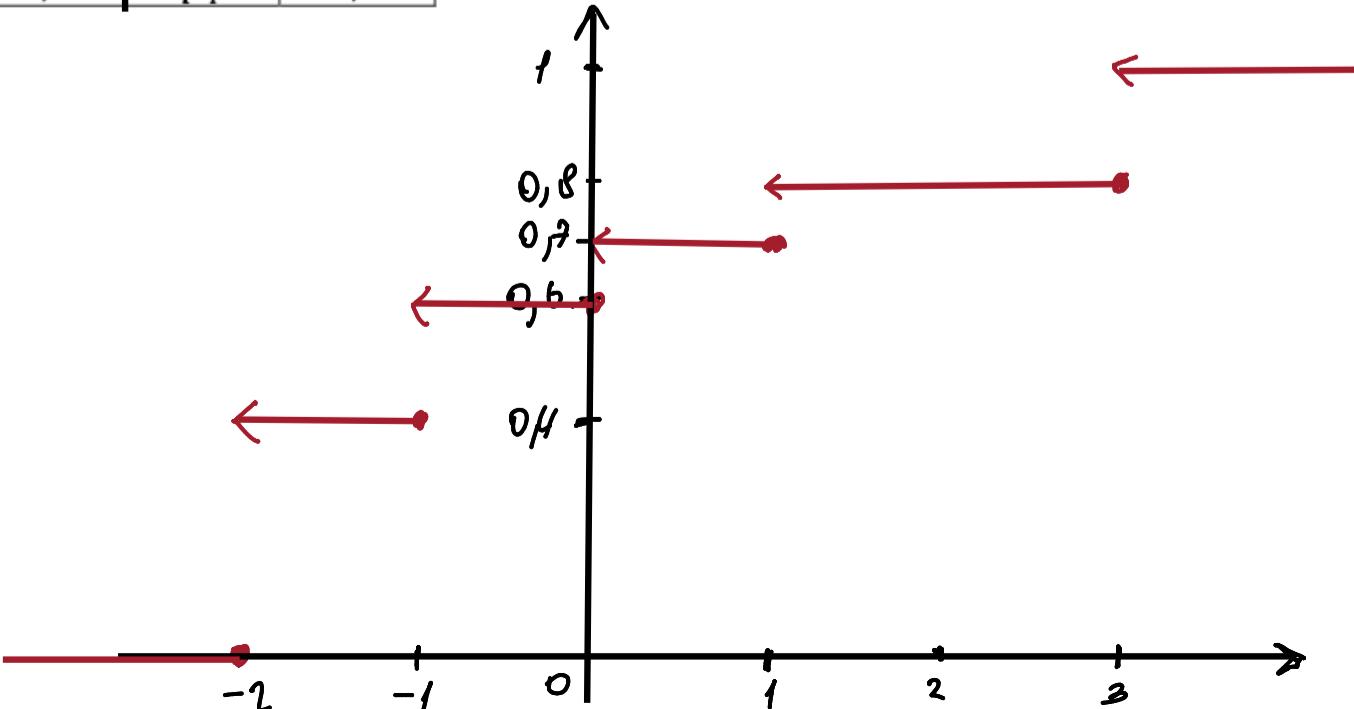
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0,3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0,3 + 0,4 = 0,7, & 0 < x \leq 1 \\ 0,7 + 0,2 = 0,9, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



2. Найти p_4 , числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(0 \leq \xi < 2)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	p_4	0,2

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0,4, & -2 < x \leq -1 \\ 0,6, & -1 < x \leq 0 \\ 0,7, & 0 < x \leq 1 \\ 0,8, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Свойства математического ожидания и дисперсии

$$1) E\xi = \xi, D\xi = 0$$

$$2) E(\xi + c) = E\xi + c \quad D(\xi + c) = D\xi + c$$

$$3) E(c \cdot \xi) = c \cdot E\xi, \quad D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D\xi$$

$$4) E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

$$5) \text{Если } \xi, \eta \text{ - незав, то } E(\xi \eta) = E\xi \cdot E\eta$$

$$6) \text{Если } \xi, \eta \text{ - незав, то } D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta), \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \eta) - E\xi \cdot E\eta$$

5. Случайные величины ξ и η независимы, $E\xi = -1$, $D\xi = 2$, $E\eta = 3$, $D\eta = 5$.

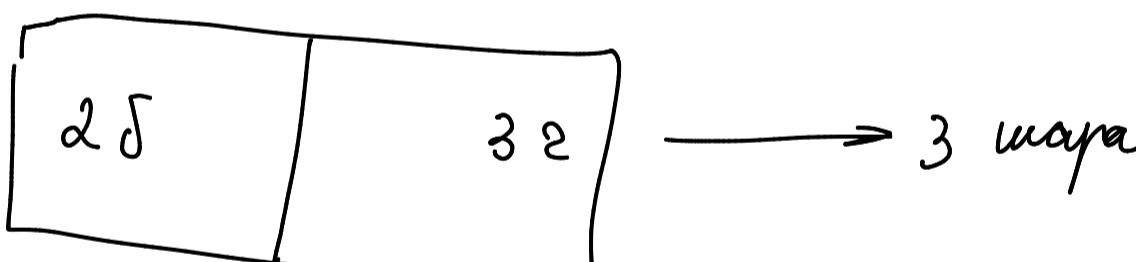
Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3\xi - 2\eta$.

$$E(3\xi - 2\eta) = 3E\xi - 2E\eta = -3 - 6 = -9$$

$$D(3\xi - 2\eta) = D(3\xi) + D(-2\eta) = 9D\xi + 4D\eta = \\ = 18 + 20 = 38$$

1. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Из урны извлекли три шара. Случайная величина ξ – число белых среди них.

Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.



ξ	0	1	2	$P(\xi=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$
P	0,1	0,6	0,3	$P(\xi=1) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = 0,6$

$$E\xi = 1,2$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = 0,3$$

$$D\xi = 0,6 + 1,2 - 1,44 = 0,36$$

2. Вероятность попадания биатлониста в цель при одном выстреле равна 0,5. У стрелка четыре патрона, он стреляет в цель до первого попадания. Случайная величина ξ – число сделанных выстрелов.

Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

$$P(\xi=k) = q^{k-1} \cdot p \quad P(\xi=2) = 0,25 \quad P(\xi=4) = q^3 p + p^4 = 0,125$$

$$P(\xi=1) = p = 0,5 \quad P(\xi=3) = 0,125$$

ξ	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,125

$$E\xi = 0,5 + 0,5 + \dots = 1,875$$

$$D\xi = 0,5 + 1 + 9 \cdot 0,125 + 16 \cdot 0,125 - (1,875)^2 = 1,109375$$

$$\sigma_{\xi} \approx 1,053 \quad \approx 1,109$$

4. Казино предлагает вам сыграть в игру: вы бросаете два игральных кубика, и получаете приз в зависимости от выпавшей на них суммы очков:
 12 очков - 100 рублей, 11 очков - 90 рублей, 10 очков - 80 рублей, 9 очков - 50 рублей, от 2 до 8 очков - 0 рублей.
 Какую сумму вы согласны заплатить за возможность сыграть в такую игру?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ξ	0	50	80	90	100
P	$\frac{26}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E\xi = 50 \cdot \frac{4}{36} + 80 \cdot \frac{3}{36} + 90 \cdot \frac{2}{36} + 100 \cdot \frac{1}{36} = 20$$

Ответ: 20