Схема Бернулли

p - вероятность успеха при одном испытании
q
r - число независимых испытаний

Pn(K) = P(Vn = K)

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

A

1. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Найти вероятность того, что их пяти выстрелов три будут точными.

$n=5,\ p=0{,}8 \quad q=0{,}2 \quad k=3$

$$P_5(3) = C_5^3 P^3 \cdot q^2 = 0{,}2048$$

2. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости шестерка выпадет дважды?

$n=4 \quad p=1/6 \quad q=5/6 \quad K=2$

$$P_4(2) = C_4^2 . p^2 \cdot q^2 = \frac{25}{216}$$

4. Найти вероятность того, что при восьми бросаниях монеты герб выпал не менее трех и не более шести раз.

```
sum([P(8, k, sympify("1/2")) for k in range(3, 7)])
```

✓ 0.0s

$$\frac{105}{128}$$

5. Вероятность правильного ответа на вопрос 0,8. Какова вероятность того, что в тесте из 10 вопросов будет не более 8 правильных ответов?

```
1 - sum([P(10, k, "0.8") for k in range(9, 11)])
```

✓ 0.0s

0.6241903616

B

1. Вероятность успеха при одном испытании равна 0,01. Сколько требуется провести испытаний, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не менее 0,5?

$p = 0{,}01 \qquad q = 0{,}99$

$P_n(k \geq 1) \geq 0{,}5$

$1 - P_n(0) \geq 0{,}5$

$1 - 0{,}99^n \geq 0{,}5$

$0{,}5 \geq 0{,}99^n$

$\ln 0{,}5 \geq n \cdot \ln 0{,}99$

$-\ln 2 \geq -n \ln \frac{100}{99}$

$n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln \frac{100}{99}} \approx 68.96$

$n = 69$

При большом числе испытаний (обычно $n \geq 100$) применяем приближенные формулы.

Если требуется найти вероятность точного числа успехов, то локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Св-ва $\varphi(x)$:

1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$

2) $x > 5 \Rightarrow \varphi(x) \approx 0$

Если требуется найти вероятность того, что число успехов находится в данном диапазоне, то интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq \nu_n \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Св-ва:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

2) $x > 5 \Rightarrow \Phi(x) \approx 0$

6. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло ровно 330 попаданий.

По локальной формуле Лапласа
n = 400
p = 0.8
q = 0.2
k = 330

$$X = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{330-320}{\sqrt{64}} = 1{,}25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1{,}25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0{,}1826 = 0{,}0228$$

7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло от 312 до 336 попаданий.

интегральная формула
p = 0.8
312 <= k <= 336

$$X_1 = \frac{n-np}{\sqrt{npq}} = -1$$

$$X_2 = 2$$

$$P_{400}(312 \le k \le 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 =$$
$$= 0{,}8185$$

8. Кубик подбросили 180 раз. Какова вероятность того, что единица выпала 27 раз?

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{27 - 180/27}{\sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = -0{,}6$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}3332 = 0{,}0666$$

9. Монета подброшена 10000 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4900 до 5100 раз?

$$X_1 = -2$$
$$X_2 = 2$$

$$P_{1000}(4900 \le k \le 5100) \approx 0{,}9544$$