

C₂Разбор стульев C₂

A - спрятались в стуле

B - ни в одном из 11 не было

A_i - спрятались в i-ом стуле ; $P(A_i) = \frac{0,9}{12} = \frac{0,3}{4} = \frac{3}{40}$ $P(A_i | B) = ?$

$$P(A_{12} | B) = \frac{P(A_{12})}{P(B)} = \frac{P(A_{12} \cdot \bar{A}_1 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{11})}{\frac{7}{40}} = \frac{P(A_{12})}{7/40} = \frac{3}{40} : \frac{7}{40} = \frac{3}{7}$$

$$P(B) = P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{11}) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{7}{40}$$

$$P(\bar{B}) = P(A_1 + \dots + A_{11}) = P(A_1) + \dots + P(A_{11}) = \frac{33}{40}$$

Разбор C3

3. Имеются n урн, в каждой n шаров. В 1-й урне 1 черный, остальные белые, во 2-й – 2 черных, ..., в n-й все черные. Из наугад выбранной урны достали шар, который оказался черным. Какова вероятность того, что второй шар из этой же урны также будет черным?

$$\sum_{k=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

H_i - выбрали i-ую урну ; $P(H_i) = \frac{1}{n}$

A - дост. 2 I раз

$$P(A | H_i) = \frac{i}{n}$$

B - дост. 2 II раз

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A | H_k) = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$P(AB) = \sum_{k=1}^n P(H_k) P(AB | H_k) = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3n^2(n-1)} = \frac{n+1}{3n}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) = \sum (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

Схема Бернулли

p - вероятность успеха при одном испытании

q

n - число независимых испытаний

$$P_n(K) = P(V_n = K)$$

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

А

1. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Найти вероятность того, что из пяти выстрелов три будут точными.

$$n=5, p=0,8, q=0,2, k=3$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 0,2048$$

2. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости шестерка выпадет дважды?

$$n=4, p=1/6, q=5/6, k=2$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{25}{216}$$

4. Найти вероятность того, что при восьми бросаниях монеты герб выпал не менее трех и не более шести раз.

```
sum([P(8, k, sympify("1/2")) for k in range(3, 7)])
```

✓ 0.0s

105

128

5. Вероятность правильного ответа на вопрос 0,8. Какова вероятность того, что в тесте из 10 вопросов будет не более 8 правильных ответов?

```
1 - sum([P(10, k, "0.8") for k in range(9, 11)])
```

✓ 0.0s

0.6241903616

В

1. Вероятность успеха при одном испытании равна 0,01. Сколько требуется провести испытаний, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не менее 0,5?

$$p = 0,01 \quad q = 0,99$$

$$P_n(k \geq 1) \geq 0,5$$

$$1 - P_n(0) \geq 0,5$$

$$1 - 0,99^n \geq 0,5$$

$$0,5 \geq 0,99^n$$

$$\ln 0,5 \geq n \cdot \ln 0,99$$

$$-\ln 2 \geq -n \ln \frac{100}{99}$$

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln \frac{100}{99}} \approx 68,96$$

$$n = 69$$

При большом числе испытаний (обычно $n \geq 100$) применяем приближенные формулы.

Если требуется найти вероятность точного числа успехов, то локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(v_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

св-ва $\varphi(x)$:

$$1) \varphi(-x) = \varphi(x)$$

$$2) x > 5 \Rightarrow \varphi(x) \approx 0$$

Если требуется найти вероятность того, что число успехов находится в данном диапазоне, то интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq v_n \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

св-ва:

$$1) \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$2) x > 5 \Rightarrow \Phi(x) \approx 1$$

6. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло ровно 330 попаданий.

По локальной формуле Лапласа

$$n = 400$$

$$p = 0.8$$

$$q = 0.2$$

$$k = 330$$

$$X = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{330 - 320}{\sqrt{64}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \phi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 = 0.0228$$

7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло от 312 до 336 попаданий.

интегральная формула

$$p = 0.8$$

$$312 \leq k \leq 336$$

$$X_1 = \frac{n - np}{\sqrt{npq}} = -1$$

$$X_2 = 2$$

$$P_{400}(312 \leq k \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0.9772 + 0.2413 = 0.8185$$

8. Кубик подбросили 180 раз. Какова вероятность того, что единица выпала 27 раз?

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{27 - 180/6}{\sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = -0.6$$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot 0.3332 = 0.0666$$

9. Монета подброшена 10000 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4900 до 5100 раз?

$$X_1 = -2$$

$$X_2 = 2$$

$$P_{10000}(4900 \leq k \leq 5100) \approx 0.9544$$

Домашка

A3, A16, A17

B2, B3

C2, C3