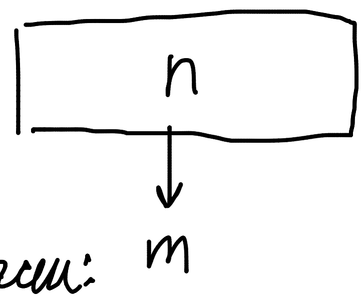
Теор. вер.
практика 1

классическая вероятность

Выборки:



случ:

а) с возвр или без

б) учитывая пор или нет

I сочетание

Соч m из n наз выборка без возвр и без учёта порядка

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

II Размещением наз выборка без возврата но с учётом порядка

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

III Выборка с возвратом и с учетом порядка

$$n^m$$

IV Выборка с возвратом

и без учёта порядка

$$C^{m}_{(n+m-1)}$$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

n – число всех эл. исходов

m – число эл. исх. благоприятных соб A

Задача 1

В коробке 8 красных и 4 синих карандаша

Вынули карандаш

Какова вероятность того что он будет красный

$12 \rightarrow 1$

8к	4с
↓ 1	

n = 12

m = 8

P(A) = 8/12 = 2/3

Задача 2

В коробке 8 кр и синих

Вынули 3

Какова вер что 2 красных и 1 синий?

$12 \rightarrow 3$

8к	4с
↓ 2	↓ 1

$$n = C^3_{12} = \frac{12!}{3!\ 9!} = 220$$

$$m = C^2_8 \cdot C^1_4 = 4 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 112$$

$$P(A) = \frac{28}{55}$$

В лес отправились 2 охотника 3 грибника и 5 школьников

из леса не вернулась половина

какова вероятность того что среди них 2 школьника и 2 грибника?

$10 \rightarrow 5$

2 О	3 г	5 ш
	↓ 2	↓ 2

$n = C_{10}^{5} = 252$

$m = C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot C_2^1 = 60$

$P(A) = \frac{60}{252} = \frac{30}{126} = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$

решение незаконное потому что формулы классической вероятности не работают когда элемент исходы не равновероятны

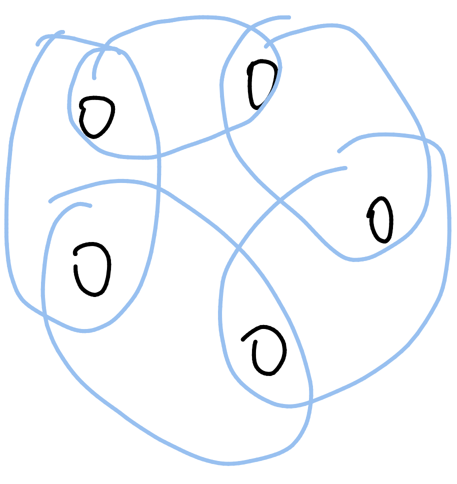
на полке расставляется 8 книг
какова вероятность того что 3 конкретные книги будут стоять рядом?

$n = 8!$

$m = 6 \cdot 3! \cdot 5!$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36 \cdot 5!}{8!} = \frac{36}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{6}{7 \cdot 8} = \frac{3}{28}$

5 человек рассаживаются за круглым столом
какова вероятность того что 2 конкретных человека будут сидеть рядом

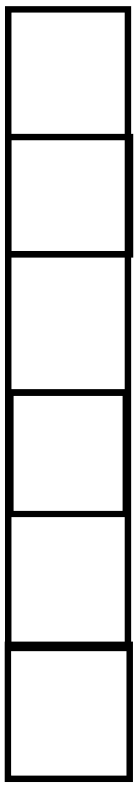


$n = 5!$

$m = 5 \cdot 2 \cdot 3!$

$P(A) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6}{5!} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

на 1 этаже 6ти этажного дома в лифт зашли 3 человека
какова вероятность того что они выйдут на разных этажах?



$n = 5^3$

$m = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

$P(A) = \frac{4 \cdot 3}{5^2} = \frac{12}{25}$

какова вероятность того что в группе из 25 человека хотя бы 2 родились в один день

$n = 365^{25}$

$m = A_{365}^{25}$

$P(\bar{A}) = 1 - \frac{365!}{365^{25} \cdot 340!} = 1 - 0,4313 = 0,5687$

Кубик подбросили дваждый
какова вероятность того что в сумме выпадет не менее 9 очков?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3			6	7	8	9
4				8	9	10
5				9	10	
6			9	10		12

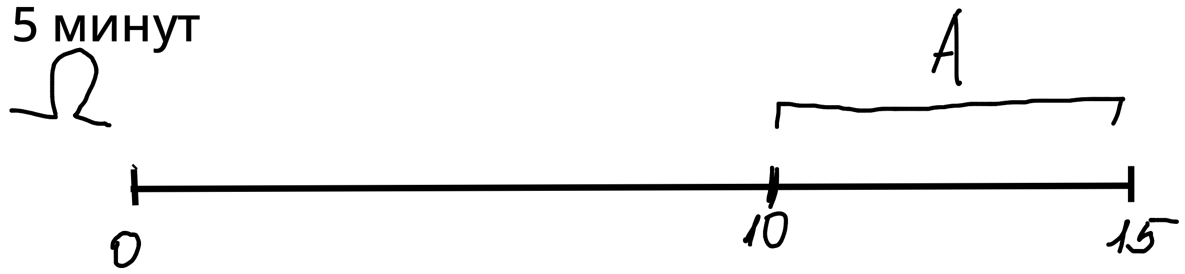
$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

геометрическая вероятность

пусть пространство элементарных исходов - замкнутая ограниченная область в R^n
и вероятность попадания в каждую точку равновозможна
тогда применима формула геометрической вероятности

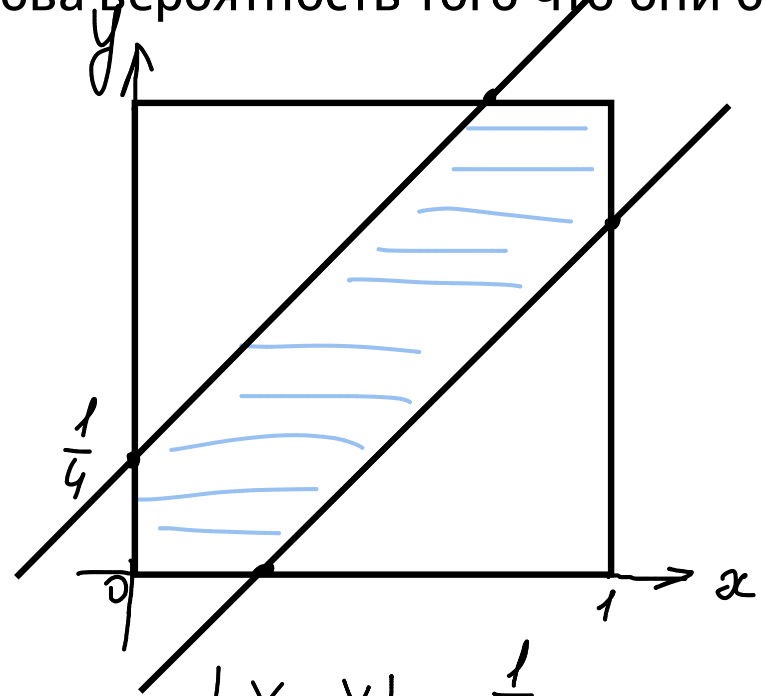
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

задача 1
трамвай ходит строго с интервалом 15 минут
какова вероятность того что случайно придя на остановку, его придётся ждать не более 5 минут



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

задача 2
двое человек договорились втретиться между 12:00 и 13:00
какова вероятность того что они будут ждать друг друга не более 15 минут



$\exists$ X – время I, $X \in [0;1]$

Y – время II, $Y \in [0;1]$

$$\Omega = [0;1] \times [0;1]$$

$$\mu(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}75^2 = 0{,}4375$$

$$P(A) = \frac{0{,}4376}{1}$$

$$|X - Y| \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq X - Y \leq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} Y \leq X + \frac{1}{4} \\ Y \geq X - \frac{1}{4} \end{cases}$$

контрольные + посещения = 80 баллов
контрольные будут в мудле

домашка

в коробке 3 красных 4 синих и 2 жёлтых карандаша
вынули 5 карандашей
какова вероятность того что из них красных и синих будет поровну?

8 команд разбиваются на 2 подгруппы по 4 в каждой
какова вероятность того что 2 сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах?

на шахматную доску поставили белую и чёрную ладью
какова вероятность того что они не бьют друг друга?

из 49 занумерованных шаров вынимается 5 шаров
найти вероятность того что максимальный номер среди вытянутых будет равен k

стержень длины L случайно разламывается на 3 части
какова вероятность того что из них можно составить треугольник?

Практика 2
Операции над событиями

Формула сложения

Если A и B несовместны, то P(A+B) = P(A)+P(B)

Общая формула: P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)

P(A1+A2+a3) = (P(A1)+P(A2)+P(A3)) - (P(A1A2)+P(A2A3)+P(A1A3)) + P(A1A2A3)

опр. События A и B независимы, если вероятность произведения равна произведению вероятностей

P(AB) = P(A)*P(B)

Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.6, а второго - 0.8 сделали по одному выстрелу

Найти вероятность того, что:

а) оба попали в цель

б) один попал в цель

в) хотя бы один попал в цель

] A_1 – I попал

A_2 – II попал

$P(A_1) = 0{,}6 \quad P(\bar{A}_1) = 0{,}4$

$P(A_2) = 0{,}8 \quad P(\bar{A}_2) = 0{,}2$

а) $A = A_1 \cdot A_2$ – оба попали

$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}48$

б) $B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + A_2 \cdot \bar{A}_1$

$P(B) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_2 \cdot \bar{A}_1) = P(A_1) P(\bar{A}_2) + P(A_2) \cdot P(\bar{A}_1) = 0{,}44$

в) C – хотя бы один

$\bar{C}$ – оба промах

$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

$P(C) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

Брак первой партии микросхем 5%, второй 10%, третьей 20%
Взяли по одной из каждой партии
Найти вероятность того что
а) все исправны
б) две исправны
в) хотя бы одна исправна

$P(\bar{A}_1) = 0{,}05 \qquad P(\bar{A}_2) = 0{,}1 \qquad P(\bar{A}_3) = 0{,}2$

$P(A_1) = 0{,}95 \qquad P(A_2) = 0{,}9 \qquad P(A_3) = 0{,}8$

– все исправны

а) $A = A_1 A_2 A_3$

$P(A) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$

$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8$

– 2 неисправны

б) $B = \bar{A}_1 \cdot A_2 A_3 + \bar{A}_2 A_1 A_3 + \bar{A}_3 A_1 A_2$

$P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}283$

в) C – одна исправна

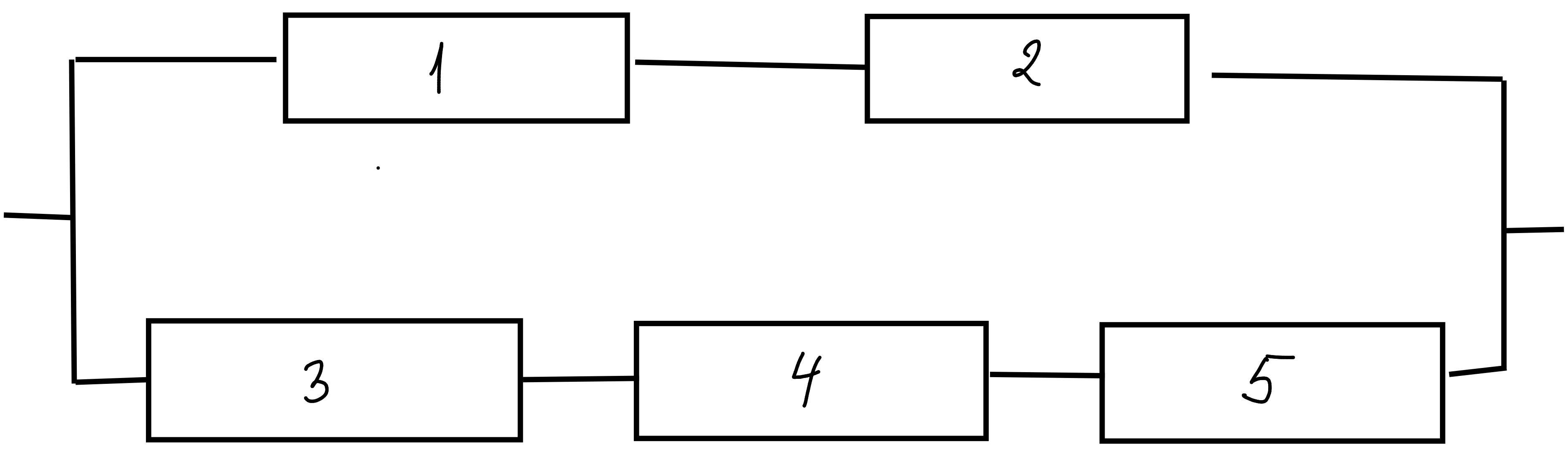
$\bar{C}$ – все неисправны

$\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$

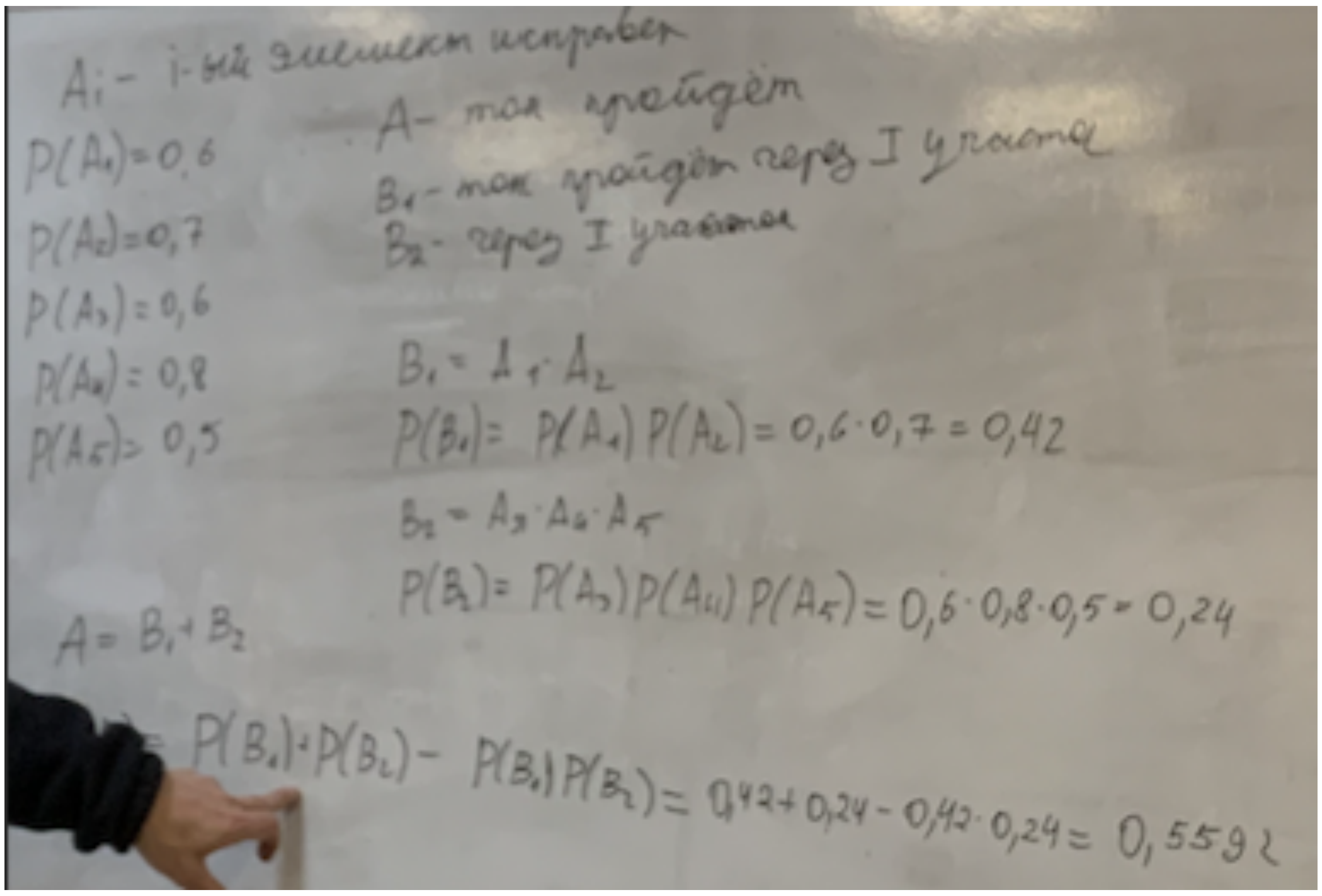
$P(\bar{C}) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}001$

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0{,}999$

Электрическая цепь состоит из 5 элементов



$p_1 = 0{,}4 \quad p_2 = 0{,}3 \quad p_3 = 0{,}4 \quad p_4 = 0{,}2 \quad p_5 = 0{,}5$



Пусть два игрока бросили по n раз монету
Затем первый ещё один раз бросил монету
Найти вероятность того что у первого игрока выпадет больше гербов, чем у второго

$\exists$ V_A – число гербов у I после n бросков
V_B – число гербов у II после n бросков
C – в итоге у A больше гербов, чем у B

$$P(V_A > V_B + V_A < V_B + V_A = V_B) = \underbrace{P(V_A > V_B) + P(V_A < V_B)}_{=} + \overbrace{P(V_A = V_B)}^{p_0} = 1$$

$$2P(V_A > V_B) + p_0 = 1$$

$$P(V_A > V_B) = \frac{1 - p_0}{2}$$

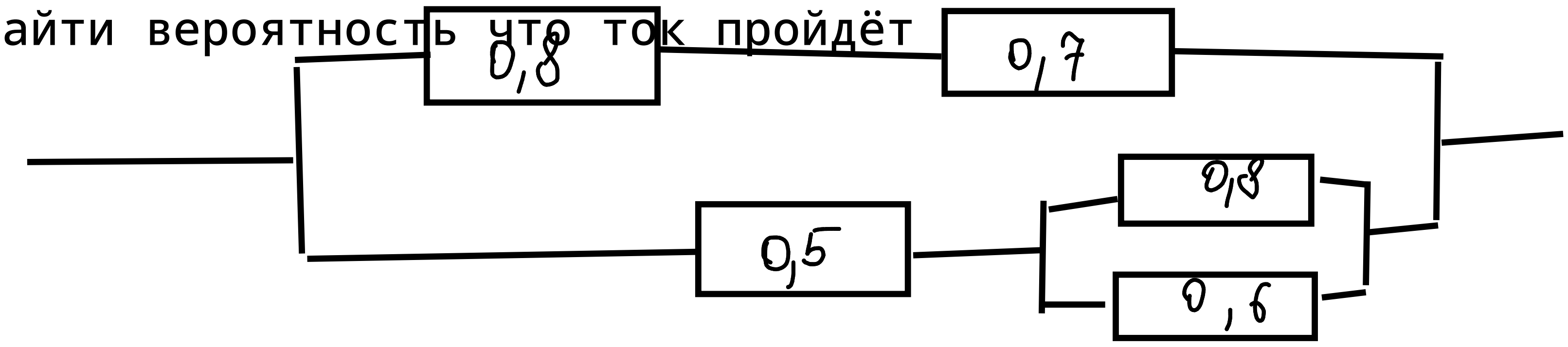
$$P(C) = P(V_A > V_B) + P(V_A = V_B)P(\Gamma) =$$

$$= \frac{1-p_0}{2} + \frac{p_0}{2} = \frac{1}{2}$$

Домашка

Вероятность попадания первого орудия в цель 0.9 второго 0.7 третьего 0.5
Найти вероятность того что
а) все попадут в цель
б) два попадут в цель
в) хотя бы одно попадёт в цель

Дана электрическая цепь (даны вероятность что всё хорошо)
найти вероятность что ток пройдёт



После выпивпи n человек случайным образом надевают n шляп
вероястность потерять шляпу по дороге каждого из них равна p
Какова вероятность того что никто не прийдёт домой в своей шляпе?
Куда стремится вероятность при n -> inf?

В самолёте n мест и заходят n пассажиров
Первой заходит старушка которая садится на любое место
каждый следующий пассажир садится на своё место если оно свободно и на произвольное если оно занято
Какова вероятность того что последний пассажир сядет на своё место?

Практика 3
Разбор шляп

$$P\left(\sum A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \dots =$$

$\exists q = 1-p$

$$P(A_i) = \frac{1-p}{n} = \frac{q}{n} \quad - n \text{ штук}$$

$$P(A_i A_j) = q^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{q^2}{A_n^2} \quad - C_n^2 \text{ штук}$$

$$P(A_i A_j A_k) = q^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{q^3}{A_n^3} \quad - C_n^3 \text{ штук}$$

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_n}) = \frac{q^n}{A_n^n} = \frac{q^n}{n!} \quad - 1 \text{ штука}$$

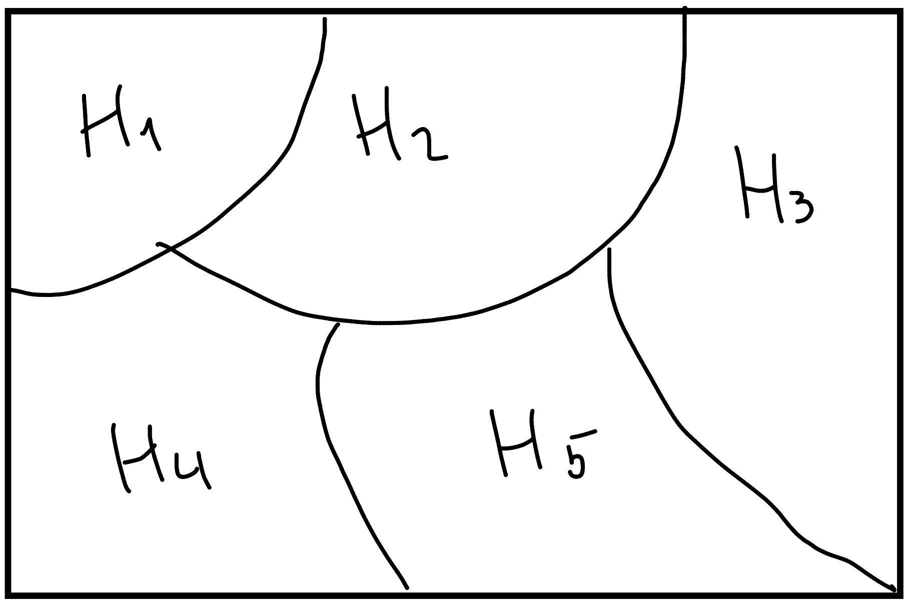
$$= q - q^2 \cdot \frac{1}{2!} + q^3 \cdot \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n!}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - q + q^2 \cdot \frac{1}{2!} - q^3 \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{q^n}{n!} \xrightarrow{n \to \infty} e^{p-1}$$

Формулы условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Полная группа событий



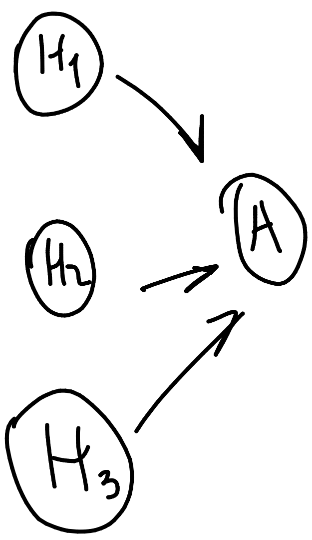
$H_1 \dots H_5$ – полная группа событ

$H_1 + \dots + H_5 = \Omega$

Формула полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

Формула Баяса (формула проверки гипотез)



$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

2. В группе 2 отличника, 5 хорошистов и 3 троечника. Вероятность решить задачу для отличника равна 0,9, для хорошиста 0,7, для троечника 0,4. Найти вероятность того, что наугад вызванный студент решит задачу.

$\left.\begin{array}{l} H_1 \text{ – вызв отличник "5"} \\ H_2 \text{ – "4"} \\ H_3 \text{ – "3"} \end{array}\right\}$ Полн групп соб

A – студент решил

$P(H_1) = 0{,}2 \quad P(H_2) = 0{,}5 \quad P(H_3) = 0{,}3$

$P(A|H_1) = 0{,}9 \quad P(A|H_2) = 0{,}7 \quad P(A|H_3) = 0{,}4$

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) =$$
$$= 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}65$$

3. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, а второго 0,3. Случайно выбранный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это был первый стрелок?

$\left.\begin{array}{l} H_1 - \text{выбр I} \\ H_2 - \text{выбр II} \end{array}\right\}$ полн группа

A - стрелок попал

$P(H_1) = 0{,}5 \qquad P(A|H_1) = 0{,}9$

$P(H_2) = 0{,}5 \qquad P(A|H_2) = 0{,}3$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_2)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{2}\cdot 0{,}9 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}3} = 0{,}75$$

6. Первый цех произвел в два раза больше деталей, чем второй. Брак в первом цехе составляет 3%, а во втором 2%. Детали поступили на склад. Найти вероятность того, что наугад взятая со склада деталь является стандартной.

$P(H_1) = \frac{2}{3} \qquad P(A|H_1) = 0{,}03$

$P(H_2) = \frac{1}{3} \qquad P(A|H_2) = 0{,}02$

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}03 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}02 = 0{,}02\cdot\frac{4}{3}$$
$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}02\cdot\frac{4}{3} = 1 - \frac{8}{300} = 1 - \frac{2}{75} = \frac{73}{75} = 0{,}97(3)$$

7. Корабль идет через минное поле, состоящее из трех участков разной плотности, длины которых 2,5 км, 3,5 км и 4 км. Вероятности подорваться на данных участках равны соответственно 0,4; 0,3; 0,5. Корабль затонул. Какова вероятность того, что он шел через второй участок?

$P(H_1) = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25 \qquad P(A|H_1) = 0{,}4$

$P(H_2) = 0{,}35 \qquad P(A|H_2) = 0{,}3$

$P(H_3) = 0{,}4 \qquad P(A|H_3) = 0{,}5$

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}35\cdot 0{,}3}{0{,}25\cdot 0{,}4 + 0{,}35\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}105}{0{,}405} = \frac{21}{81} = \frac{7}{27} \approx 0{,}(259)$$

4. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок подбросил две монеты и сделал столько выстрелов, сколько выпало гербов. Найти вероятность поражения цели.

$\bar{A}$ – не поразил

$P(H_0) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A|H_0) = 0$

$P(H_1) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A|H_1) = 0{,}8$

$P(H_2) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A|H_2) = 1 - 0{,}2^2 = 0{,}96$

$$P(A) = \sum P(H_i)\cdot P(A|H_i) = 0{,}4 + 0{,}24 = 0{,}64$$

3. В первом ящике 4 белых и 1 черный шар, во втором и третьем по 3 белых и 2 черных, в четвертом 1 белый и 4 черных. Из наугад выбранного ящика достали два шара. Оба оказались белыми. Какова вероятность того, что они из первого ящика?

A – оба белые

H_1 – выбр I $\quad P(H_1) = \frac{1}{4}$

H_2 – выбр II или III $\quad P(H_2) = \frac{2}{4}$

H_3 – выбр IV $\quad P(H_3) = \frac{1}{4}$

I	II	III	IV
4б 1ч	3б 2ч	3б 2ч	1б 4ч

$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$ $\quad P(A|H_2) = 0{,}3$ $\quad P(A|H_3) = 0$

$$P(A) = \sum P(H_i)P(A_i|H_i) = \frac{1}{4}(0{,}6 + 0{,}6) = 0{,}3$$

$$A(H_1|A) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}6}{0{,}3} = \frac{1}{2}$$

В

1. На шахматную доску наугад поставили белого короля и черного коня. Какова вероятность того, что король будет под шахом?

1	2	3	3	3	3	2	1
2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2
1	2	3	3	3	3	2	1

$P(H_1) = \frac{4}{64}$ $\quad P(A|H_1) = \frac{2}{63}$

$P(H_2) = \frac{8}{64}$ $\quad P(A|H_2) = \frac{3}{63}$

$P(H_3) = \frac{20}{64}$ $\quad P(A|H_3) = \frac{4}{63}$

$P(H_4) = \frac{16}{64}$ $\quad P(A|H_4) = \frac{6}{63}$

$P(H_5) = \frac{16}{64}$ $\quad P(A|H_5) = \frac{8}{63}$

$$P(A) = \frac{1}{64\cdot 63}\left(4\cdot 2 + 8\cdot 3 + 20\cdot 4 + 16\cdot 6 + 16\cdot 8\right) =$$

$$= \frac{1}{16\cdot 63}\left(2 + 6 + 20 + 24 + 32\right) = \frac{84}{16\cdot 63} = \frac{1}{12}$$

5. Вероятность попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4 и 2/3. При их одновременном выстреле произошло два попадания. Какова вероятность того, что промахнулся третий стрелок?

A_1 – I попал $\quad P(A_1) = \frac{4}{5} \quad P(\overline{A_1}) = \frac{1}{5}$

A_2 – II $\quad P(A_2) = \frac{3}{4} \quad P(\overline{A_2}) = \frac{1}{4}$

A_3 – III $\quad P(A_3) = \frac{2}{3} \quad P(\overline{A_3}) = \frac{1}{3}$

B – двое попали

$$P(\overline{A_3} | B) = \frac{P(\overline{A_3}\cdot B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A_3}\cdot A_2\cdot A_1)}{P(B)} = \frac{6}{13}$$

$$P(B) = A_1 A_2 \overline{A_3} + \ldots = \frac{13}{20}$$

C

1. Среди населения 1% воров. У хозяина в комнате, где находилось десять гостей, пропал кошелек. Какова вероятность того, что наугад выбранный гость является вором?

A – выбранный чел – вор $\quad P(A) = 0{,}01$

B – хотя бы 1 вор, $\overline{B}$ – все не честные

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{\text{т.к. } A \subset B}{=} \frac{P(A)}{1-0{,}99^{10}} = \frac{0{,}01}{1-0{,}99^{10}} \approx 0{,}105$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}99^{10}$$

Домашка

A5, C2, C3, C4

Разбор стульев C_2

C_2

A – спрятано в стуле

B – ни в одном из 11 не было

A_i - бриллианты в i-ом стуле ; $P(A_i) = \frac{0,9}{12} = \frac{0,3}{4} = \frac{3}{40}$

$P(A_i | B)$ – ?

$$P(A_{12}| B) = \frac{P(A_{12}B)}{P(B)} = \frac{P(A_{12} \cdot \overline{A_1} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{11}})}{\frac{7}{40}} = \frac{P(A_{12})}{7/40} = \frac{3}{40} : \frac{7}{40} = \frac{3}{7}$$

$$P(B) = P(\overline{A_1} \ldots \overline{A_{11}}) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{7}{40}$$

$$P(\overline{B}) = P(A_1 + \ldots + A_{11}) = P(A_1) + \ldots + P(A_{11}) = \frac{33}{40}$$

Разбор С3

3. **Имеются n урн, в каждой n шаров. В 1-й урне 1 черный, остальные белые, во 2-й – 2 черных, …., в n–й все черные. Из наугад выбранной урны достали шар, который оказался черным. Какова вероятность того, что второй шар из этой же урны также будет черным?**

$$\sum_{k=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

H_i – выбрали i-ую урну ; $P(H_i) = \frac{1}{n}$

A – дост. ч I раз $\qquad P(A | H_i) = \frac{i}{n}$

B - дост ч II раз

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A | H_k) = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$P(AB) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(AB | H_k) = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3n^2(n-1)} = \frac{n+1}{3n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

Схема Бернулли

p - вероятность успеха при одном испытании
q
r - число независимых испытаний

Pn(K) = P(Vn = K)

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

.

A

1. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Найти вероятность того, что их пяти выстрелов три будут точными.

$n = 5, \ p = 0{,}8 \quad q = 0{,}2 \quad k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 P^3 \cdot q^2 = 0{,}2048$$

2. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости шестерка выпадет дважды?

$n = 4 \quad p = 1/6 \quad q = 5/6 \quad K = 2$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{25}{216}$$

4. Найти вероятность того, что при восьми бросаниях монеты герб выпал не менее трех и не более шести раз.

```
sum([P(8, k, sympify("1/2")) for k in range(3, 7)])
✓ 0.0s
```

$$\frac{105}{128}$$

5. Вероятность правильного ответа на вопрос 0,8. Какова вероятность того, что в тесте из 10 вопросов будет не более 8 правильных ответов?

```
1 - sum([P(10, k, "0.8") for k in range(9, 11)])
✓ 0.0s
```

0.6241903616

B

1. Вероятность успеха при одном испытании равна 0,01. Сколько требуется провести испытаний, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не менее 0,5?

$p = 0{,}01 \qquad q = 0{,}99$

$P_n(k \geq 1) \geq 0{,}5$

$1 - P_n(0) \geq 0{,}5$

$1 - 0{,}99^n \geq 0{,}5$

$0{,}5 \geq 0{,}99^n$

$\ln 0{,}5 \geq n \cdot \ln 0{,}99$

$-\ln 2 \geq -n \ln \frac{100}{99}$

$n \geq \frac{\ln 2}{\ln \frac{100}{99}} \approx 68.96$

$n = 69$

При большом числе испытаний (обычно $n \geq 100$) применяем приближенные формулы.

Если требуется найти вероятность точного числа успехов, то локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Св-ва $\varphi(x)$:

1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$

2) $x > 5 \Rightarrow \varphi(x) \approx 0$

Если требуется найти вероятность того, что число успехов находится в данном диапазоне, то интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq \nu_n \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Св-ва:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

2) $x > 5 \Rightarrow \Phi(x) \approx 0$

6. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло ровно 330 попаданий.

По локальной формуле Лапласа
n = 400
p = 0.8
q = 0.2
k = 330

$$X = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{330-320}{\sqrt{64}} = 1{,}25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1{,}25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0{,}1826 = 0{,}0228$$

7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло от 312 до 336 попаданий.

интегральная формула
p = 0.8
312 <= k <= 336

$$X_1 = \frac{n-np}{\sqrt{npq}} = -1$$

$$X_2 = 2$$

$$P_{400}(312 \leq k \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 =$$
$$= 0{,}8185$$

8. Кубик подбросили 180 раз. Какова вероятность того, что единица выпала 27 раз?

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{27 - 180/27}{\sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = -0{,}6$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}3332 = 0{,}0666$$

9. Монета подброшена 10000 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4900 до 5100 раз?

$$X_1 = -2$$
$$X_2 = 2$$

$$P_{1000}(4900 \leq k \leq 5100) \approx 0{,}9544$$

Домашка

A3, A16, A17

B2, B3

C2, C3

3. Вероятность выхода из строя одного мотора самолета равна q. Самолет может продолжать полет, если исправна хотя бы половина моторов. Для каких значений q двухмоторный самолет следует предпочесть четырехмоторному?

В3.

A – успешный полет двухмоторного

B – успешный полёт 4-мот

$$P(A) = 1 - q^2$$

$$P(B) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - q^4 - C_4^1 p q^3 = 1 - q^4 - 4(1-q)\,q^3 =$$

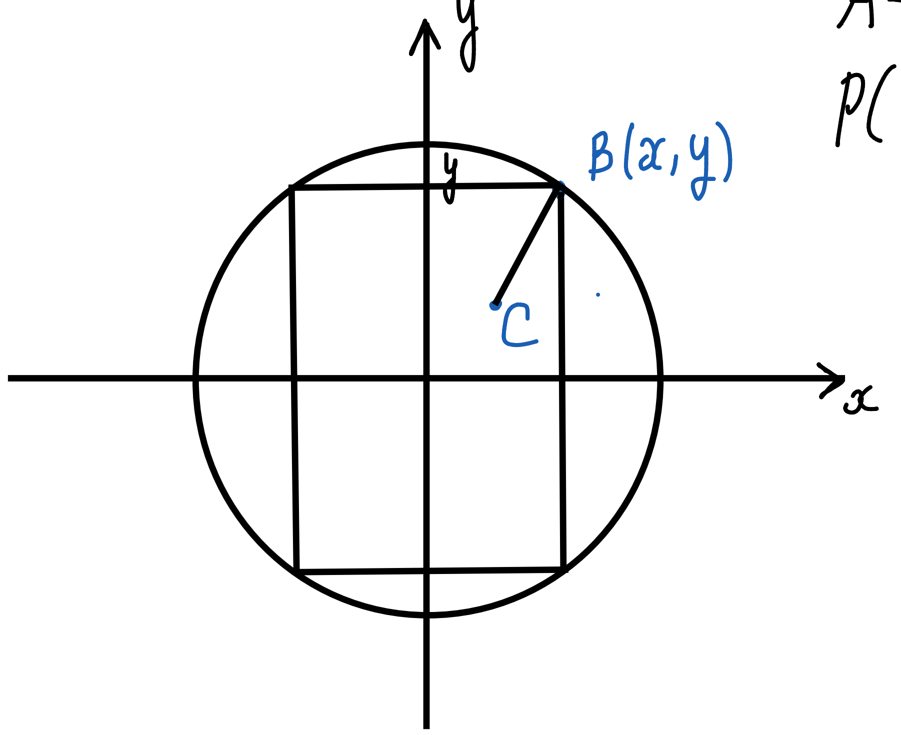
$$= 1 - 4q^3 + 3q^4$$

$$P(A) \geqslant P(B)$$

$$1 - q^2 \geqslant 1 - 4q^3 + 3q^4$$

$$\frac{1}{3} \leq q \leq 1$$

4. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ наугад выбирается точка B, а в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ наугад точка C. Строится прямоугольник с диагональю BC и сторонами, параллельными осям координат. Какова вероятность того, что данный прямоугольник лежит в круге? Обосновать корректность решения.



A – в круге, C в прям

$$P(A|B) = \frac{4xy}{\pi} = \frac{|4\cos\varphi \sin\varphi|}{\pi} = \frac{|2\sin 2\varphi|}{\pi}$$

$$P(A) = \int_0^{2\pi} \frac{2|\sin 2\varphi|}{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{4}{\pi^2}$$

в кр будет 10 задач на полтора часа
типовые задачи

округление: 4 цифры

если число исп 100 и больше то применяем не форм бернулли а одну из приближённых
иначе не засчитает

Формула Пуассона

Если p - мало, то в схеме бернулли применяют формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Погрешность не превышает min(p, hp)

11. Вероятность клика по баннеру на одной веб-странице равна 0,0025. Какова вероятность того, что при показе 600 страниц будет 3 просмотра рекламы?

$n = 600, \quad k = 3, \quad p = 0{,}0025$

$\lambda = np = 1{,}5$

$$P_{600}(3) = \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}1255 \qquad \Delta \leq 0{,}0025$$

10. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого из них равна 0,001. Какова вероятность отказа больше двух элементов?

$n = 1000 \quad p = 0{,}001, \quad k > 2$

$\lambda = np = 1$

$P_n(k > 2) - ?$

$$P_{1000}(k > 2) = 1 - P_{1000}(0) - P_{1000}(1) - P_{1000}(2) =$$

$$= 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} - \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}08$$

$\varepsilon < 0{,}001$

14. В службу спасения поступает в среднем 0,5 звонков в час. Найти вероятность того, что за смену продолжительностью четыре часа поступит не более трех заявок.

$\lambda = 0{,}5$ (в час)

за 4 часа не более 3 заявок, $T = 4$

$$P(k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T}$$

$\lambda T = 2$

$$P(k \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) =$$

$$= e^{-2}\left(\frac{2^0}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) \approx 0{,}8571$$

Погрешность неуместна в этой задаче, потому что это не схема бернулли

Полиномиальная схема

Обобщением схемы Бернулли является полиномиальная схема.

Пусть при n независимых испытаниях могут произойти m несовместных исходов, p_i — вероятность $i^{\text{го}}$ исхода при одном отдельном испытании, $1 \le i \le n$. Тогда вероятность того, что при n испытаниях $i^{\text{й}}$ исход появится n_i раз, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, равна:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) \approx \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$$

2. Какова вероятность того, что при бросании 12 костей каждая грань выпадет дважды?

$n = 12, \quad m = 6 \qquad p_1 = \dots = p_6 = 1/6$

$n_1 = \dots = n_6 = 2$

$$P_{12}(2, \dots 2) = \frac{12!}{(2!)^6} \cdot \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^6 \approx 0{,}0034$$

3. Брак при изготовлении деталей составляет 20%. На выборочный контроль деталь попадает с вероятностью 1/2. Какова вероятность того, что при проверке партии из 10 деталей нашли две бракованных, а половина деталей осталась непроверенной?

$n = 10$

1: деталь не проверена

2: проверена и брак

3: проверена и не брак

$p_1 = \frac{1}{2}, \quad n_1 = 5$

$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}, \quad n_2 = 2$

$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}, \quad n_3 = 3$

$$P_{10}(5, 2, 3) = \frac{10!}{5!\, 2!\, 3!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}0504$$

B

1. На группу из 25 человек имеется 25 экзаменационных билетов. Студент выучил один билет. Каким по очереди ему следует идти на экзамен, чтобы вероятность сдать его была наибольшей?

Ai - билет вытащен на i-ом шаге

$$P(A_i) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \dots \cdot \overline{A}_{i-1} \cdot A_i) = \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdots = \frac{1}{25}$$

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайную величину называем *дискретной*, если она принимает не более чем счетное число значений. Такая случайная величина задается законом распределения:

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Здесь элементы первой строки x_i – значения, которые может принять данная случайная величины, а элементы второй строки p_i – вероятности этих значений, причем $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* (среднее значение) $E\xi$, *дисперсия* $D\xi$ и *среднее квадратическое отклонение* σ_ξ, которые вычисляются по формулам:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i; \qquad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (E\xi)^2; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

А

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

$E\xi = -0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,1$

$D\xi = 0,3 + 0,2 + 0,4 - 0,01 = 0,89$

$\sigma = \sqrt{D\xi} = 0,94$

2. Найти p_4, числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(0 \le \xi < 2)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	p_4	0,2

$p_4 = 1 - 0,4 - 0,2 - 0,1 - 0,2 = 0,1$

$E\xi = -0,8 - 0,2 + 0,1 + 0,6 = -0,3$

$D\xi = 1,6 + 0,2 + 0,1 + 1,8 - 0,09 = 3,61$

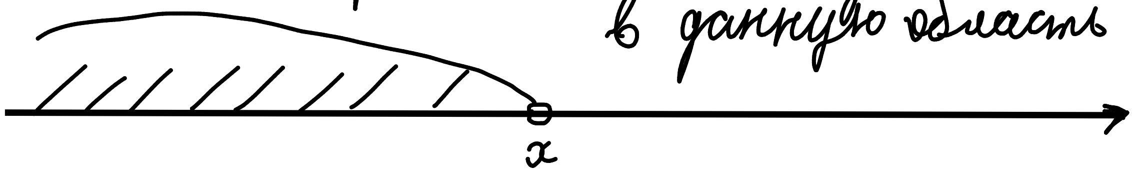
$\sigma_\xi = 1,9$

$P(0 \le \xi < 2) = 0,1 + 0,1 = 0,2$

Функция распределения

Опр. $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$

$F(x)$ - вероятность попадания в данную область

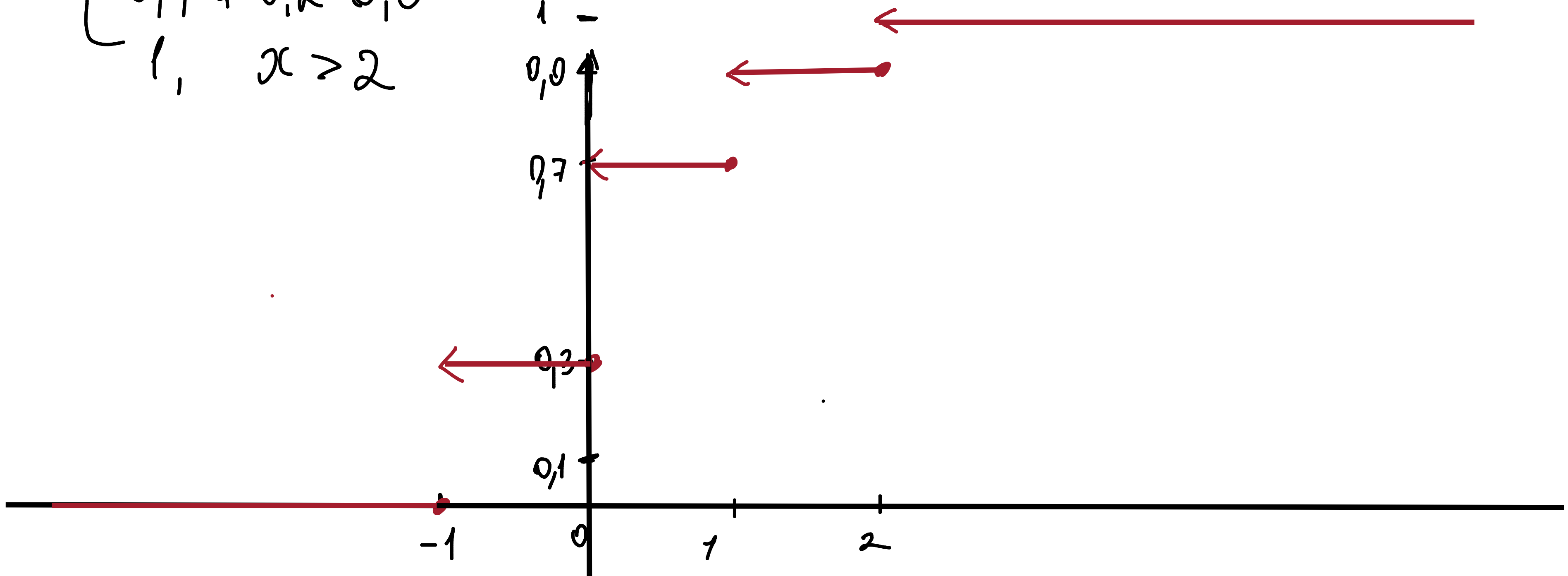


А

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

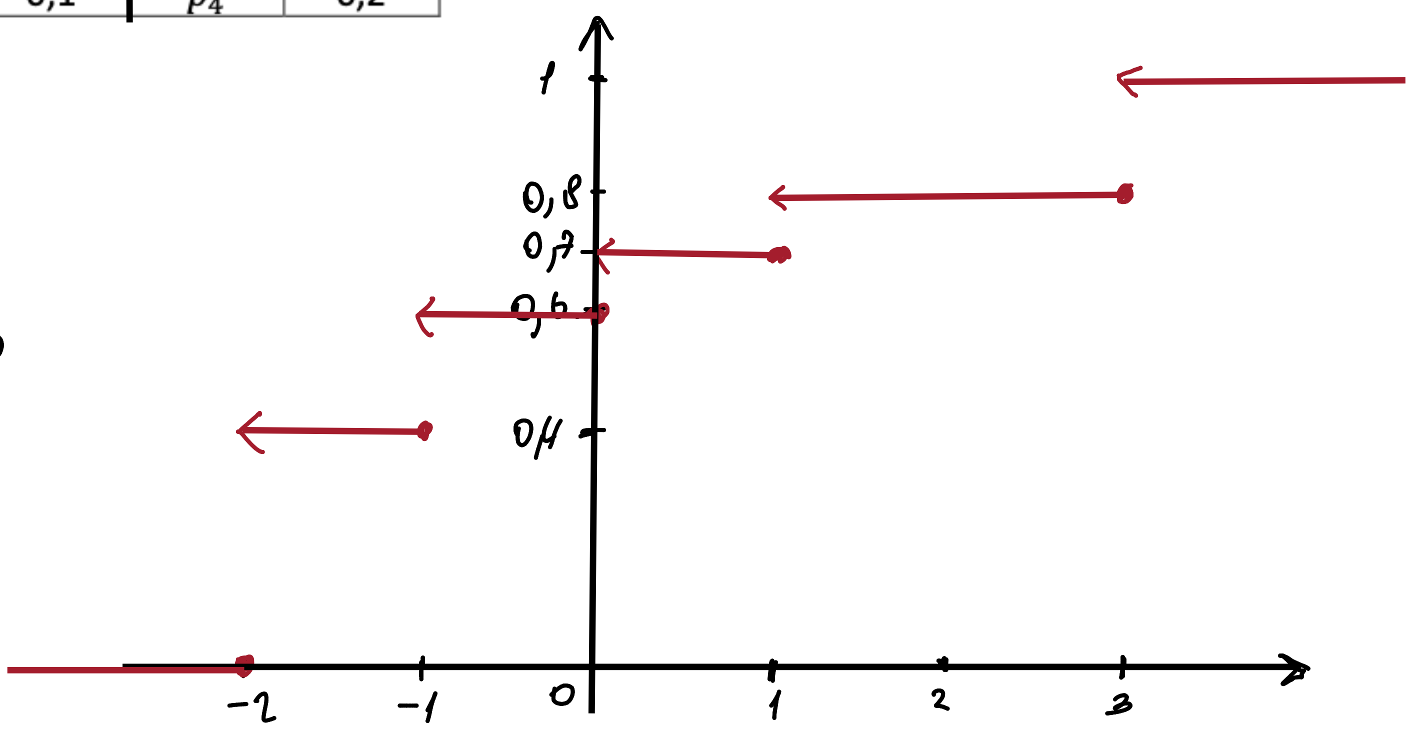
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0{,}3 & -1 \le x \le 0 \\ 0{,}3+0{,}4=0{,}7 & 0 < x \le 1 \\ 0{,}7+0{,}2=0{,}9 & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



2. Найти p_4, числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(0 \le \xi < 2)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	p_4	0,2

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ 0{,}4 & -2 < x \le -1 \\ 0{,}6 & -1 < x \le 0 \\ 0{,}7 & 0 < x \le 1 \\ 0{,}8 & 1 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



Свойства математического ожидания и дисперсии

1) $EC = C$, $DC = 0$

2) $E(\xi + C) = E\xi + C$ $\quad D(\xi + C) = D\xi + C$

3) $E(C \cdot \xi) = C \cdot E\xi$, $\quad D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$

4) $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$

5) Если ξ, η - незав, то $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$

6) Если ξ, η - незав, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\,cov(\xi, \eta)$, $\quad cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$

5. Случайные величины ξ и η независимы, $E\xi = -1$, $D\xi = 2$, $E\eta = 3$, $D\eta = 5$.
   Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3\xi - 2\eta$.

$$E(3\xi - 2\eta) = 3E\xi - 2E\eta = -3 - 6 = -9$$

$$D(3\xi - 2\eta) = D(3\xi) + D(-2\eta) = 9D\xi + 4D\eta = 18 + 20 = 38$$

1. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Из урны извлекли три шара. Случайная величина ξ – число белых среди них.
   Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

2б	3ч

→ 3 шара

ξ	0	1	2
p	0,1	0,6	0,3

$$p(\xi = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

$$p(\xi = 1) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = 0{,}6$$

$$p(\xi = 2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = 0{,}3$$

$E\xi = 1{,}2$

$D\xi = 0{,}6 + 1{,}2 - 1{,}44 = 0{,}36$

2. Вероятность попадания биатлониста в цель при одном выстреле равна 0,5. У стрелка четыре патрона, он стреляет в цель до первого попадания. Случайная величина ξ – число сделанных выстрелов.
   Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

$p(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p$

$p(\xi = 1) = p = 0{,}5$

$p(\xi = 2) = 0{,}25$

$p(\xi = 3) = 0{,}125$

$p(\xi = 4) = q^3 p + p^4 = 0{,}125$

ξ	1	2	3	4
p	0,5	0,25	0,125	0,125

$$E\xi = 0{,}5 + 0{,}5 + \ldots = 1{,}875$$

$$D\xi = 0{,}5 + 1 + 9 \cdot 0{,}125 + 16 \cdot 0{,}125 - (1{,}875)^2 = 1{,}109375$$

$$\approx 1{,}109$$

$$\sigma\xi \approx 1{,}053$$

4. Казино предлагает вам сыграть в игру: вы бросаете два игральных кубика, и получаете приз в зависимости от выпавшей на них суммы очков:
12 очков - 100 рублей, 11 очков - 90 рублей, 10 очков - 80 рублей, 9 очков - 50 рублей, от 2 до 8 очков - 0 рублей.
Какую сумму вы согласны заплатить за возможность сыграть в такую игру?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ξ	0	50	80	90	100
p	$\frac{26}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E\xi = 50 \cdot \frac{4}{36} + 80 \cdot \frac{3}{36} + 90 \cdot \frac{2}{36} + 100 \cdot \frac{1}{36} = 20$$

Ответ: до 20

Домашка

A3, A6

B3

C1

Практика

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение*, если существует функция $f(x)$, такая что $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ для любых вещественных чисел a, b.

Данная функция $f(x)$ называется *функцией плотности распределения*.

Абсолютно непрерывная случайная величина задается функцией плотности либо, что чаще удобнее, *функцией распределения* $F(x) = P(\xi < x)$.

Основные свойства этих функций:

1). $f(x) \geq 0$ и выполнено условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2). $F(x)$ – непрерывная неубывающая функция, $0 \leq F(x) \leq 1$, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

3). $f(x) = F'(x)$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

4). $P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Числовые характеристики непрерывного распределения находим по формулам:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\,; \qquad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E\xi)^2; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

$$F(x) = P(\delta < x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$f(x) = F'(x)$$

98. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал (0,5; 1,5), построить графики плотности и функции распределения.

1) a - ?

2) E_ξ, D_ξ, σ - ?

3) $F(x)$ - ?

4) $P(0{,}5 < \delta < 1{,}5)$

1) $\int_0^2 ax\,dx = \frac{ax^2}{2}\Big|_0^2 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

2) $E_\xi = \int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

$D_\xi = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - (E_\xi)^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$

3) $F(x) = P(\delta < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

при $x < 0$, $F(x) = 0$

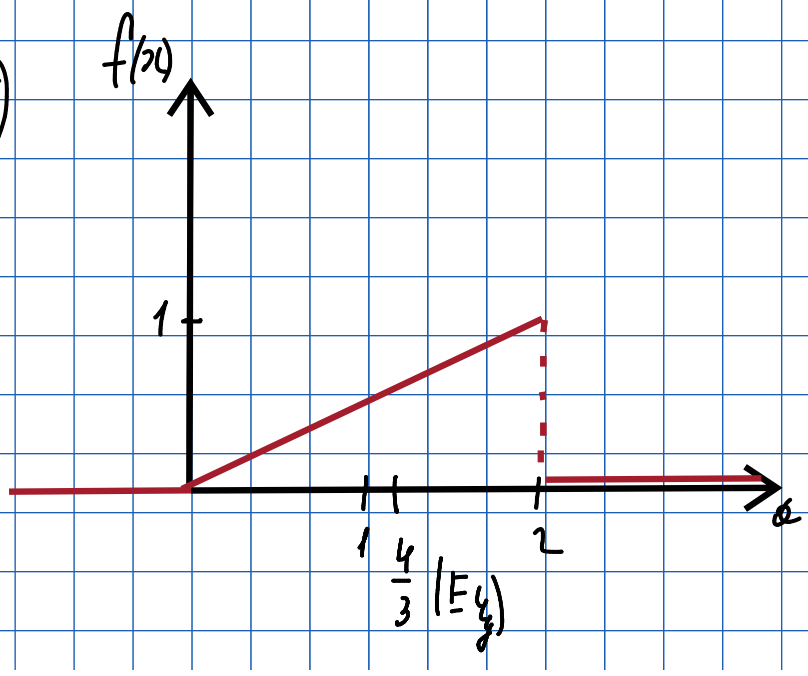
при $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \int_0^x \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}$

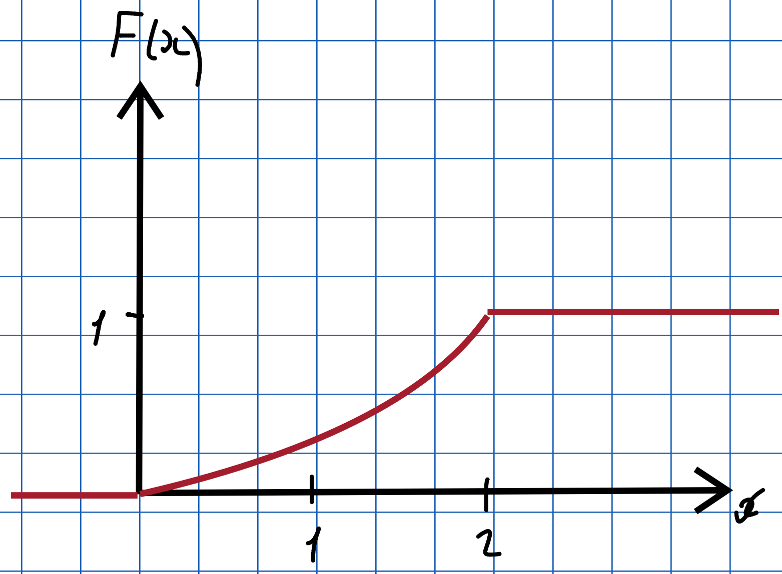
при $x > 2$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/4 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

4) $P(0{,}5 < \xi < 1{,}5) = F(1{,}5^-) - F(0{,}5^-) = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$

5)





100. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{a}{x^4}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервалы $(2;4)$, $(0;3)$, $(4;\infty)$, построить графики плотности и функции распределения.

1) $\int_1^\infty \frac{a}{x^4}dx = a\int_1^\infty x^{-4}dx = a\int_1^\infty \frac{x^{-3}}{-3}dx = a\left(-\frac{x^{-3}}{3}\Big|_1^\infty\right) = \frac{a}{3}, \quad a = 3$

2) $E\xi = 3\int_1^\infty x^{-3}dx = 3\,\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^\infty = \frac{3}{2}$

$D\xi = 3\int_1^\infty x^{-2}dx - (E\xi)^2 = 3\,\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^\infty - \frac{9}{4} = 3 - 2\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3)

101. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ Ax + B, & -2 \le x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найти неизвестные параметры A и B, плотность, ее числовые характеристики, вероятность попадания в интервал $(0; 3)$, построить графики плотности и функции распределения.

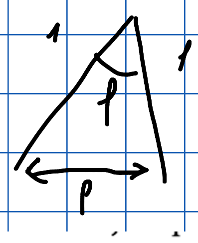
$$\begin{cases} 4A + B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \qquad 6A = 1, \quad A = \frac{1}{6}$$

$$B = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = A = \frac{1}{6}$$

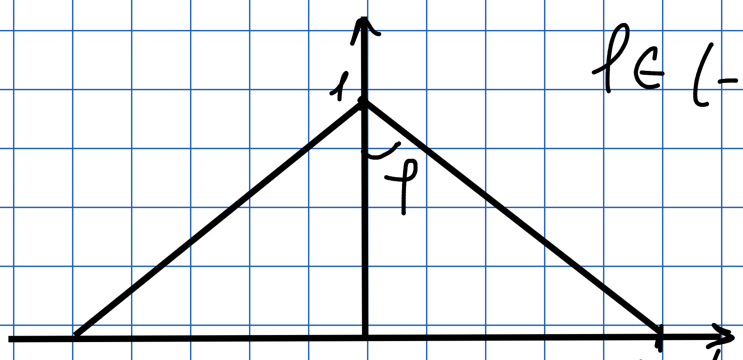
$$F(3) - F(0) = 3A = \frac{1}{2}$$

107. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол $\varphi \in [0; \pi]$.
Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.



$$r(\varphi) = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

110. В точке (0,1) находится источник излучения, равномерно испускающий частицы во все стороны. Случайная величина ξ – точка пересечения частицы с осью OX. Найти ее функцию распределения, плотность и математическое ожидание.



$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = tg\,\varphi$$

$$\varphi = arctg\, x$$

$$F(x) = P(\xi < x) = P\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < arctg\, x\right) = \frac{arctg\, x + \frac{\pi}{2}}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$E_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi} \ln(x^2+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

абс. сх. нет

мат. ож. не сущ.

Домашка

99, 107, 109, 105